

**Tutorato di Statistica 1 del 08/04/2010**  
**Docente: Prof.ssa Enza Orlandi**  
**Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco**

**Esercizio 1.**

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie con distribuzione uniforme sull'insieme dei punti con coordinate intere in  $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 7; x \leq y \leq x + 2\}$ .

La funzione di densità di probabilità discreta congiunta è quindi  $f(x, y) = \frac{1}{24}$ , per  $(x, y) \in S$ . Trovare:

1. Le densità marginali  $f_X(\cdot)$  e  $f_Y(\cdot)$
2. La  $f_{Y|X}(y|x)$  densità discreta condizionata di  $Y$  rispetto a  $X$ .
3. La media di  $Y$  condizionata a  $X = x$ ,  $E[Y|x]$
4. La varianza di  $Y$  condizionata a  $X = x$ ,  $Var(Y|x)$

**Esercizio 2.**

Sia  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $n \in N$  un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli di parametro  $p \in (0, 1)$

1. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza  $T := T_n$  per  $p$ .
2. È un stimatore non distorto? (Motivare)
3. Determinare l'errore quadratico medio
4. È lo stimatore trovato  $T$  una statistica sufficiente? (si scriva cosa si intende per Statistica Sufficiente e si verifichi che  $T$  lo sia quando  $n = 2$ )
5. Si consideri la successione degli stimatori  $T_n$  al variare della lunghezza del campione  $n$ ,  $\{T_n\}_n$ . Si dica cosa si intende per successione di stimatori semplicemente consistenti e si verifichi che  $\{T_n\}_n$  lo sia.
6. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza  $V$  per la varianza della distribuzione di Bernoulli.
7. È  $V$  non distorto? (Motivare)
8. Trovare il valore di  $c$  affinché  $cV$  sia uno stimatore non distorto della varianza della distribuzione di Bernoulli.

**Esercizio 3.**

Sia  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \in N$  un campione casuale estratto da una distribuzione esponenziale con densità di probabilità  $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ ,  $x \in R^+$ ,  $\theta > 0$ .

1. Trovare lo stimatore  $T$  di massima verosimiglianza per  $\theta$ .
2. Determinare se  $T$  non è distorto.
3. Determinare l'errore quadratico medio di  $T$ .
4. Determinare la funzione di distribuzione di probabilità di:  
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Esercizio 4.**

Sia  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  un campione casuale estratto da una distribuzione con densità di probabilità

$$f(x, \theta) = \theta x^{(\theta-1)}, \text{ per } x \in (0, 1), \theta > 0.$$

Determinare lo stimatore  $T$  di  $\theta$  con il metodo dei momenti.